Cohomologie des Groupes Classique 2

Rappel **Déf.** Un espace fibré (fibration) est un triple (E, p, B)
$p: E \twoheadrightarrow B$ surjective qui satisfait le "relev. des homotopies" : $\forall n, \forall f: [0,1]^n \times [0,1] \to B$ et $g: [0,1]^n \to E$
tq. $p \circ g(x) = f(x,0)$ $\forall\, x \in [0,1]^n$, il y a une app. continue
$h: [0,1]^n \times [0,1] \to E$ tq $p \circ h = f$ et $h(x,0) = g(x,0)$ $\forall x \in [0,1]^n$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^n = [0,1]^n \times \{0\}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_n"] & E \arrow[d] \\
{[0,1]^n \times [0,1]} \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B
\end{tikzcd}$$

Pour tout $b \in B$ fixé, $F_b := p^{-1}(b) \subseteq E$: aujourd'hui, je néglige ce choix $\rightarrow$ tous mes espaces sont connexes par arcs.

Trm 0 $p: E_{x_0} \to X$ définit l'espace des chemins basés en x_0 $\left(= \{\gamma: [0,1] \to X \text{ tq. } \gamma(0) = x_0\}\right)$ en tant que fibration.
$p(\gamma) = \gamma(1)$. La fibre est l'espace des lacets Ω_{x_0}. L'espace E_{x_0} est contractible.

Trm 1 Étant donnée une fibration $p: E \to B$ à fibre F, il y a une suite exacte longue d'homotopie

$$\cdots\ \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \pi_{i-1}(E) \to \pi_{i-1}(B)$$
$$\cdots \to \pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to 0.$$

Trm 2 Il y a une suite spectrale homologique

$$H_r(B, H_s(F,A)) \Rightarrow H_{r+s}(E,A)$$

pour tout groupe de coeff. A, où $H_s(F,A)$ est un système local sur la base. Lorsque

- $A = k$ est un corps, et
- $H_s(F,A)$ est trivial,

on a $H_r(B, H_s(F,A)) = H_r(B,A) \otimes H_s(F,A) \Rightarrow H_{r+s}(E,A)$.

Mêmes résultats en cohomologie, mutatis mutandis.

3 Applications

1 $SU(n)$. Il y a une fibration $p: SU(n) \xrightarrow[\text{fibre } SU(n-1)]{} S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$

L'application $p: T \mapsto T(\text{pôle } N)$. Surjective $\Leftrightarrow$ action est transitive, fibre est $SU(n-1) = \text{stab}(\text{pôle } N)$.

Tcm 1: $\dots \to \pi_2(S^{2n-1}) \to \pi_1(SU(n-1)) \to \pi_1(SU(n)) \to \pi_1(S^{2n-1}) \to 0$.

$2n-1 \geq 3 \rightsquigarrow \pi_1(S^{2n-1}) = \pi_2(S^{2n-1}) = 0$.

$\Rightarrow \pi_1(SU(n-1)) = \pi_1(SU(n)) = \dots = \pi_1(SU(1)) = 0$.

$\Rightarrow$ En particulier, tout système local sur $SU(n)$ est trivial, $\forall n$.

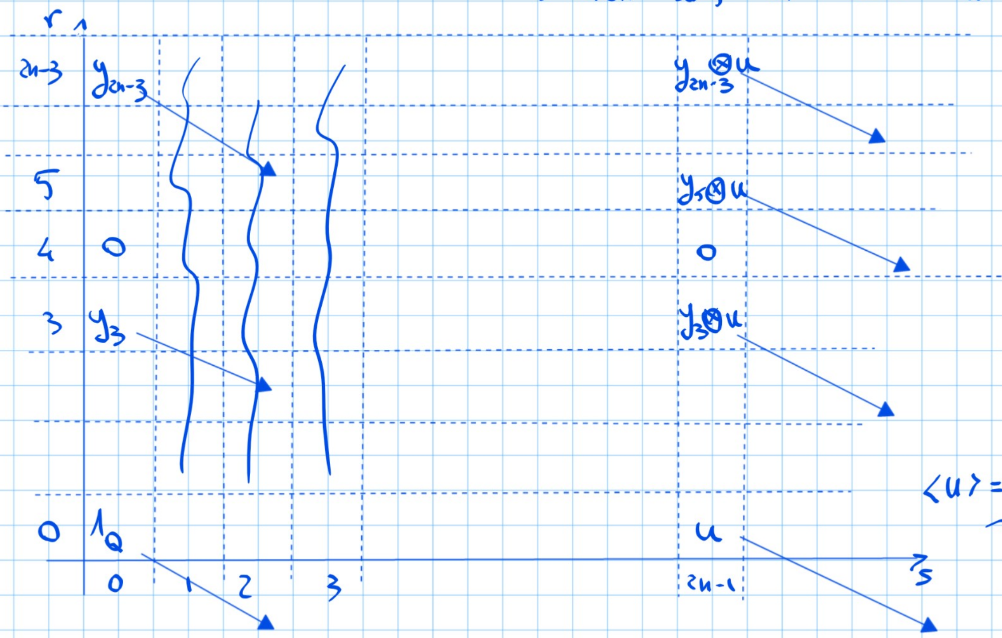
Trm 2 Résultat: $H^*(SU(n), \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3, y_5, \dots, y_{2n-1})$ où y_i est primitif en degré i.

Pour l'obtenir, par récurrence sur n: $n=1$ $SU(1) = \{1\}$ et $H^*(SU(1), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} = \Lambda_{\mathbb{Q}}\{1\}$.

$(n-1) \rightsquigarrow n$: $p: SU(n) \xrightarrow[SU(n-1)]{} S^{2n-1}$ et la suite spectrale est

$$E_2^{r,s} = \underbrace{H^r(SU(n-1), \mathbb{Q})}_{\text{récurrence}} \otimes \underbrace{H^s(S^{2n-1}, \mathbb{Q})}_{} \Rightarrow H^{r+s}(SU(n), \mathbb{Q}).$$

$\hookrightarrow$ Rien sauf si $s=0$ ou $s=2n-1$.



$\langle u \rangle = H^{2n-1}(S^{2n-1}, \mathbb{Q})$

$\Rightarrow E_2^{r,s} = E_3^{r,s}$; et u a degré $2n-1$: si on pose $y_{2n-1} := u$, on trouve $H^*(SU(n), \mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3, y_5, \dots, y_{2n-1})$

Tcm 1 Cela montre aussi que $\pi_i(SU(n)) \leftrightarrow \pi_i(S^{2n-1}) \dots \to$ l'étude complète (= avec torsion) de $\pi_i(SU(n))$ est hyper-dur.

② $U(n) \rightsquigarrow$ Sensiblement la même chose, mais

$$H^*(U(n),\mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_1,y_3,\dots,y_{2n-1})$$

où y_1 "provient" du fait que $\pi_1(U(1)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z} \quad \forall n.$

③ $SO(n) \rightsquigarrow V_k(\mathbb{R}^n) =$ la variété des k-repères orthonormaux dans $\mathbb{R}^n$: elle admet une action de $SO(n)$ avec stabilisateur $\simeq SO(n-k) \Rightarrow V_k(\mathbb{R}^n) \simeq SO(n)/SO(n-k)$.

On a des fibrations $\underbrace{V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow}_{V_{k-1}(\mathbb{R}^n)} S^{n-1}$ ce qui permet de calculer [JPS, V, § 6] l'anneau $H^*(V_k(\mathbb{R}^n),\mathbb{Q})$ par récurrence. Lorsque $k=n-1$, donc $V_{n-1}(\mathbb{R}^n) = SO(n)$, on trouve

$$H^*(SO(n),\mathbb{Q}) = \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3,y_7,\dots,y_{2n-5}) \otimes \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_{n-1}) & n \text{ pair} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3,y_7,\dots,y_{2n-3}) & n \text{ impair.} \end{cases}$$

(y_i = primitifs en degré i).

§ $n \longrightarrow +\infty$.

On peut définir $G(\infty) = \varinjlim_{n\to+\infty} G(n)$ où $G \in \{O, SO, U, SU\}$

$\rightsquigarrow H^*(SU(\infty),\mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3,y_5,y_7,\dots,y_{2n-1},\dots)$

$H^*(U(\infty),\mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_1,y_3,\dots,y_{2n-1},\dots)$

$H^*(SO(\infty),\mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_3,y_7,\dots,y_{4n-1},\dots)$

$\Rightarrow$ On peut donc aborder les espaces homogènes $U(\infty)/SO(\infty)$ et $SU(\infty)/SO(\infty)$.

<u>Lemme</u> [Mimura & Toda, "Topology of Lie groups", IV, § 3) $U(\infty)$ est un H-groupe <u>commutatif</u>. Il en est donc de même de

$SO(\infty)$, et des quotients $U(\infty)/SO(\infty)$ et $U(\infty)/SU(\infty)$.

Application: $H^*(SU(\infty)/SO(\infty), \mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}\left(\{y_i : i \in I\},\ y_i \text{ produit en degré } i \text{ impair}\right)$

en fait,

$$H^*\left(SU(\infty)/SO(\infty), \mathbb{Q}\right) \overset{(*)}{=} \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_1, y_5, \dots, y_{4n-3}, \dots) = H^*(U(\infty), \mathbb{Q})/H^*(SO(\infty), \mathbb{Q}) & S = \emptyset \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}(y_5, \dots, y_{4n-3}, \dots) = H^*(SU(\infty), \mathbb{Q})/H^*(SO(\infty), \mathbb{Q}) & S = S. \end{cases}$$

Une preuve de $(*)$ provient d'un théorème de Cartan et Serre qui dit : si X = H-espace à nombres de Betti finis on a $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \cong$ Partie primitive de degré n de $H^*(X, \mathbb{Q})$

↳ La preuve de ce théorème repose sur la construction d'une tour de fibration $\cdots \to X(n+1) \to X(n) \to X(n-1) \to \cdots \to X(1) = X$ où

a) Chaque fibre de $X(i) \to X(i-1)$ est un $K(\pi_i(X), i-1)$

b) $$\pi_i(X(n)) = \begin{cases} 0 & i < n \\ \pi_i(X(n-1)) = \pi_i(X(n-2)) = \cdots = \pi_i(X) & i \geq n \end{cases}$$

On applique de façon itérée la suite spectrale de Serre à chaque $\underbrace{X(i) \longrightarrow}_{K(\pi_i(X), i-1)} X(i-1)$ et on relie l'homologie de X à celle des espaces $K(\pi_i(X), i)$.